

## خواص المؤثر التفاضلي العكسي:

الخاصة الأولى: إذا كان  $\varphi_1(D)$ ,  $\varphi_2(D)$ , و  $\varphi_3(D)$  ثلاث مؤثرات تفاضلية عكسية

عندئذ:

$$1. \quad [\varphi_1^{-1}(D) + \varphi_2^{-1}(D)]y = [\varphi_1^{-1}(D)\varphi_2^{-1}(D) + \varphi_2^{-1}(D)\varphi_1^{-1}(D)]y$$

$$2. \quad [\varphi_1^{-1}(D) + \varphi_2^{-1}(D) + \varphi_3^{-1}(D)]y = [\varphi_1^{-1}(D)\varphi_2^{-1}(D)\varphi_3^{-1}(D) + \varphi_2^{-1}(D)\varphi_1^{-1}(D)\varphi_3^{-1}(D) + \varphi_3^{-1}(D)\varphi_1^{-1}(D)\varphi_2^{-1}(D) + \varphi_3^{-1}(D)\varphi_2^{-1}(D)\varphi_1^{-1}(D) + \varphi_1^{-1}(D)\varphi_3^{-1}(D)\varphi_2^{-1}(D) + \varphi_1^{-1}(D)\varphi_2^{-1}(D)\varphi_3^{-1}(D)]y$$

$$3. \quad [\varphi_1^{-1}(D)\varphi_2^{-1}(D)]y = [\varphi_2^{-1}(D)\varphi_1^{-1}(D)]y$$

عملية الضرب تبديلية

$$4. \quad [\varphi_1^{-1}(D) \cdot (\varphi_2^{-1}(D) \cdot \varphi_3^{-1}(D))]y = [\varphi_1^{-1}(D) \cdot (\varphi_2^{-1}(D) \cdot \varphi_3^{-1}(D))]y$$

عملية الضرب تجميعية

$$5. \quad [\varphi_1^{-1}(D) \cdot (\varphi_2^{-1}(D) + \varphi_3^{-1}(D))]y = [\varphi_1^{-1}(D) \cdot \varphi_2^{-1}(D)]y + [\varphi_1^{-1}(D) \cdot \varphi_3^{-1}(D)]y$$

عملية الضرب توزيعية على الجمع

الخاصة الثانية: إذا كان  $\varphi_1(D)$  مؤثر تفاضلي كثير حدود عكسي فعندئذ يمكن تحليل المؤثر التفاضلي  $\varphi(D)$  إلى جداء عوامله الأولية أي أن:

$$\star \quad \frac{1}{\varphi(D)} \cdot y = \frac{1}{(D-m_1)(D-m_2) \dots (D-m_n)} \cdot y$$

حيث  $m_1, m_2, \dots, m_n$  هي جذور للمعادلة  $\varphi(D)=0$

$$\frac{1}{D^2-4D+3} y = \frac{1}{(D-1)(D-3)} \cdot y$$

مثال:

وباستخدام طريقة تفريق الكسور فإن العلاقة \* تكتب على الشكل:



SUBJECT:

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot y = \left[ \frac{B_1}{D-M_1} + \frac{B_2}{D-M_2} + \dots + \frac{B_n}{D-M_n} \right] \cdot y$$

$$\frac{1}{(D-1)(D-3)} \cdot y = \left( \frac{B_1}{D-1} + \frac{B_2}{D-3} \right) \cdot y$$

$$\frac{1}{(D-1)(D-3)} = \frac{B_1}{D-1} + \frac{B_2}{D-3} \quad \text{نضرب الطرفين بـ } D-1$$

$$\frac{1}{D-3} = B_1 + \frac{B_2(D-1)}{D-3}$$

لنعوض  $D=1$

$$\frac{1}{D-3} = B_1 + 0 \Rightarrow \boxed{B_1 = -\frac{1}{2}}$$

نضرب الطرفين بـ  $D-3$

$$\frac{1}{D-1} = \frac{B_1(D-3)}{D-1} + B_2$$

لنعوض  $D=3$

$$\frac{1}{2} = 0 + B_2 \Rightarrow \boxed{B_2 = \frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{D^2-4D+3} \cdot y = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{D-1} \cdot y + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{D-3} \cdot y$$

**الخاصة الثالثة:** المؤثر التفاضلي العكسي الخطي أي أن:

$$\frac{1}{\varphi(D)} \cdot \sum_{j=1}^k A_j \cdot y_j = \sum_{j=1}^k A_j \cdot \frac{1}{\varphi(D)} \cdot y_j$$

$$\frac{1}{\varphi(D)} (A_1 y_1 + A_2 y_2) = A_1 \frac{1}{\varphi(D)} \cdot y_1 + A_2 \frac{1}{\varphi(D)} \cdot y_2 \quad \text{نلاحظ}$$

**الخاصة الرابعة:** إن لا يتجأ تأثير المؤثر التفاضلي العكسي على الدالة  $B$  فيه عملية تكامل من الشكل:

$$\frac{1}{D-m} \cdot u(x) = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot u(x) \cdot dx$$



$$(x, y) = (c_1, c_2) + c_2(c_1)$$

SUBJECT:

الإشارة: لنفرض أن  $\frac{1}{D-m} \cdot V(x) = U(x)$  عندئذٍ لنؤثر على طرفين المعادلة

$$(D-m) \cdot \frac{1}{D-m} \cdot V(x) = (D-m) \cdot U(x)$$

أي أن

$$(D-m) \cdot U(x) = V(x)$$

$$U' - mU = V(x)$$

ولكنه معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى غير متجانسة  
عامل التكامل لها  $\mu = e^{-mx}$   $\Rightarrow \mu = e^{-\int m dx}$   
نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل:

$$e^{-mx} \cdot U' - m e^{-mx} \cdot U = e^{-mx} \cdot V(x)$$

$$\frac{d}{dx} [e^{-mx} U(x)] = e^{-mx} V(x)$$

بالمكاملة نجد أن:

$$e^{-mx} \cdot U(x) = \int e^{-mx} \cdot V(x) \cdot dx + A$$

حيث A ثابت التكامل. نضرب الطرفين بـ  $e^{mx}$  نجد أن:

$$U(x) = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot V(x) \cdot dx + A \cdot e^{mx}$$

أي أن:

$$\frac{1}{D-m} \cdot V(x) = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot V(x) \cdot dx + A \cdot e^{mx}$$

وبما أن:

$$(D-m) \cdot A \cdot e^{mx} = A(D-m) \cdot e^{mx} = A(m-m) \cdot e^{mx} = 0$$

$$\frac{1}{D-m} \cdot V(x) = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot V(x) \cdot dx$$

هذه قاعدة:

أولاً: عندئذٍ  $V(x) = A$

$$\frac{1}{D-m} A = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot A \cdot dx = A \cdot e^{mx} \int e^{-mx} dx$$

$$= A \cdot e^{mx} \left( \frac{e^{-mx}}{-m} \right) = \frac{A}{-m}$$



عندئذ  $V(x) = e^{ax}$  نابا

$$\frac{1}{D-m} e^{ax} = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot e^{ax} dx = e^{mx} \int e^{a-mx} dx$$

$$\frac{1}{D-2} e^x = \frac{1}{1-2} \cdot e^x = -e^x \quad \text{فلا} = e^{mx} \cdot \frac{e^{(a-m)x}}{a-m} = \frac{e^{ax}}{a-m}$$

عندئذ  $V(x) = e^{mx}$  نابا إذا كان

$$\frac{1}{D-m} e^{mx} = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot e^{mx} dx = e^{mx} \int dx = x \cdot e^{mx}$$

فلا  $\frac{1}{D-1} e^x = x e^x$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D-m)^2} e^{mx} &= \frac{1}{D-m} \cdot \frac{1}{D-m} e^{mx} \\ &= \frac{1}{D-m} x \cdot e^{mx} = e^{mx} \int e^{-mx} (x \cdot e^{mx}) dx \\ &= e^{mx} \int x dx = \frac{x^2}{2} \cdot e^{mx} = \frac{x^2}{2!} \cdot e^{mx} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{(D-m)^p} e^{mx} = \frac{x^p}{p!} \cdot e^{mx}$$

فلا  $\frac{1}{(D-2)^3} e^{2x} = \frac{x^3}{3!} \cdot e^{2x}$

عندئذ  $V(x) = \cos ax$  نابا إذا كان

$$\frac{1}{D-m} \cos ax = \frac{1}{a^2+m^2} [a \sin ax - m \cos ax]$$

الإثبات

$$\frac{1}{D-m} \cos ax = e^{mx} \int e^{-mx} \cos ax dx$$

التجزئة = تفرضان

$-a \sin ax dx = du \Leftrightarrow \cos ax = u$

$-\frac{1}{m} e^{-mx} = z \Leftrightarrow e^{-mx} dx = dz$

$$\int e^{-mx} \cos ax dx = -\frac{1}{m} e^{-mx} \cos ax + \frac{a}{m} \int e^{-mx} \sin ax dx$$

بالخارج



SUBJECT:

$$a \cos ax \, dx = du \in \sin ax = 4 \text{ افرض}$$

$$-\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} = 2x \in e^{-mx} \, dx = dx$$

$$\begin{aligned} I &= -\frac{1}{m} e^{-mx} \cos ax - \frac{a}{m} \left[ -\frac{1}{m} e^{-mx} \sin ax + \frac{a}{m} \int e^{-mx} \cos ax \, dx \right] \\ &= -\frac{1}{m} e^{-mx} \cos ax + \frac{a}{m^2} \int e^{-mx} \sin ax - \frac{a^2}{m^2} \int e^{-mx} \cos ax \, dx \\ &= \frac{a^2}{m^2} \int e^{-mx} \cos ax + \int e^{-mx} \cos ax \, dx = \frac{a^2}{m^2} \int e^{-mx} \cos ax \, dx \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} \cos ax + \frac{a}{m^2} \cdot e^{-mx} \sin ax$$

$$\frac{a^2 + m^2}{m^2} \int e^{-mx} \cos ax \, dx = \frac{a}{m^2} e^{-mx} \sin ax - \frac{m}{m^2} \cdot e^{-mx} \cos ax$$

$$\int e^{-mx} \cos ax = \frac{e^{-mx}}{a^2 + m^2} [a \sin ax - m \cos ax]$$

$$e^{+mx} \int e^{-mx} \cos ax \, dx = \frac{1}{a^2 + m^2} [a \sin ax - m \cos ax]$$

$$\therefore \frac{1}{D-3} \cos 4x \quad \text{مثال: أوجد الناتج}$$

$$= \frac{1}{16+9} [4 \sin 4x - 3 \cos 4x]$$

$$= \frac{4}{25} \sin 4x - \frac{3}{25} \cos 4x$$

$$\therefore \frac{1}{D+2} \cos 3x = \frac{1}{9+4} [3 \sin 3x + 2 \cos 3x]$$

$$\therefore \frac{1}{D-1} \cos x = \frac{1}{1-1} = \frac{1}{0} \quad \text{غير مبين}$$



والعلاقة السابقة تفشل عندما  $m = ai$  أو  $m = -ai$  عندئذ:

$$\frac{1}{D - ai} \cos ax = e^{aix} \int e^{-aix} \cos ax \, dx \quad M = ai$$

نقوم بـ  $\cos ax$  بـ  $e^{-aix}$  أدلة

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \begin{cases} e^{ix} = \cos x + i \sin x \\ e^{-ix} = \cos x - i \sin x \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$= e^{aix} \int e^{-aix} \left( \frac{e^{aix} + e^{-aix}}{2} \right) dx$$

$$= e^{aix} \int \frac{dx}{2} + \int \frac{e^{-2aix}}{2} dx$$

$$= e^{aix} \left[ \frac{x}{2} - \frac{1}{4ai} e^{-2aix} \right] = x \frac{e^{aix}}{2} - \frac{e^{-aix}}{4ai} \quad i \times$$

$$\frac{1}{D - ai} \cos ax = x \cdot \frac{e^{aix}}{2} + \frac{i}{4a} e^{-aix} \quad \star$$

ملاحظة: هذه العلاقة ليست لأصية كثير من الأحيان العملية لكن من هذه العلاقة نستنتج أن:

$$\cos(-ax) = \cos ax$$

$$\frac{1}{D + ai} \cos ax = \frac{x \cdot e^{-aix}}{2} - \frac{i}{4a} e^{aix} \quad \star \star$$

نظر  $\star \star \star$  نبدأ:

$$\left[ \frac{1}{D - ai} - \frac{1}{D + ai} \right] \cos ax = \frac{x}{2} (e^{aix} - e^{-aix}) + \frac{i}{4a} (e^{aix} + e^{-aix})$$

$$\frac{(D + ai) - (D - ai)}{2ai} = \frac{2ai}{(D - ai)(D + ai)} = \cos ax =$$

$$= \frac{x}{2} (e^{aix} - e^{-aix}) + \frac{i}{4a} (e^{aix} + e^{-aix})$$



SUBJECT:

201 :

$$\frac{2ai}{D^2+a^2} \cdot \cos ax = \frac{x}{2} (e^{aix} - e^{-aix}) + \frac{1}{4a} (e^{aix} + e^{-aix})$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cdot \cos ax = \frac{x}{2a} \left( \frac{e^{aix} - e^{-aix}}{2i} \right) + \frac{1}{4a^2} \cdot \frac{e^{aix} + e^{-aix}}{2}$$

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cdot \cos ax = \frac{x}{2a} \sin ax + \frac{1}{4a^2} \cdot \cos ax$$

وبما أن أصل الكسر  $\frac{1}{4a^2} \cdot \cos ax$  : 0

$$(D^2+a^2) \cdot \frac{1}{4a^2} \cdot \cos ax = \frac{1}{4a^2} (D^2+a^2) \cdot \cos ax$$

$$= \frac{1}{4a^2} (-a^2 + a^2) \cdot \cos ax = 0$$

$$\frac{1}{D^2+a^2} \cdot \cos ax = \frac{x}{2a} \sin ax$$

وبالتالي فإن :

$$\frac{1}{D^2+9} \cos 3x = \frac{x}{6} \sin 3x$$

$$v(x) = \sin ax$$

عندئذ :

إذا كان

$$\frac{1}{D-m} \sin ax = \frac{1}{a^2+m^2} [-a \cos ax - m \sin ax]$$

هذه العلاقة تفشل عندما  $m = ai$  أو  $m = -ai$

$$\frac{1}{D-4} \sin 3x =$$

مثال : أوجد ناتج

$$= \frac{1}{9+16} [-3 \cos 3x + 4 \sin 3x]$$



$$5. \quad \frac{1}{D+3} \sin 4x = \frac{1}{4+9} [-4 \cos 4x + 3 \sin 4x]$$

وعندما  $m = ai$  أو  $m = -ai$  فإن العلامة السابقة تقبل بكل شي  
مستند أن:

$$\frac{1}{D^2+a^2} \sin ax = -\frac{x}{2a} \cos ax$$

مثال: أوجد ناتج:

$$\frac{1}{D^2+9} \sin 3x = -\frac{x}{6} \cos 3x$$

إذا كان  $V(x) = \text{ch} ax$  عند  $x$

$$\frac{1}{D-m} \text{ch} ax = \frac{1}{a^2-m^2} [a \cdot \text{sh} ax + m \cdot \text{ch} ax]$$

$$\frac{1}{D-m} \text{ch} ax = e^{mx} \int e^{-mx} \cdot \text{ch} ax \cdot dx$$

التعويض

المثال:

لفرض أن

$$a \cdot \text{sh} ax \cdot dx = du \Leftrightarrow \text{ch} ax = u$$

$$-\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} = z \Leftrightarrow e^{-mx} \cdot dx = dz$$

$$\int e^{-mx} \cdot \text{ch} ax \cdot dx = -\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} \cdot \text{ch} ax + \frac{a}{m} \int e^{-mx} \cdot \text{sh} ax \cdot dx$$

لفرض أن

$$a \cdot \text{ch} ax \cdot dx = du \Leftrightarrow \text{sh} ax = u$$

$$-\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} = z \Leftrightarrow e^{-mx} \cdot dx = dz$$

$$I = -\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} \cdot \text{ch} ax + \frac{a}{m} \left[ -\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} \cdot \text{sh} ax + \frac{a}{m} \int e^{-mx} \cdot \text{ch} ax \cdot dx \right]$$

$$= -\frac{1}{m} \cdot e^{-mx} \cdot \text{ch} ax - \frac{a}{m^2} \cdot e^{-mx} \cdot \text{sh} ax + \frac{a^2}{m^2} \int e^{-mx} \cdot \text{ch} ax \cdot dx$$

$$= \left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right) \cdot \int e^{-mx} \cdot \text{ch} ax \cdot dx = -\frac{m}{m^2} \cdot e^{-mx} \cdot \text{ch} ax - \frac{a}{m^2} \cdot e^{-mx} \cdot \text{sh} ax$$



SUBJECT:

$$(m^2 + a^2) \int e^{-mx} \cdot \cosh x \, dx = -m \cdot e^{-mx} \cdot \cosh x - a \cdot e^{-mx} \cdot \sinh x$$

$$\int e^{-mx} \cdot \cosh x \, dx = \frac{a}{a^2 + m^2} \cdot e^{-mx} \cdot \sinh x + \frac{m}{a^2 + m^2} \cdot e^{-mx} \cdot \cosh x$$

$$e^{mx} \int e^{-mx} \cdot \cosh x \, dx = \frac{1}{a^2 + m^2} [a \sinh x + m \cosh x] \text{ في حالة } m = a$$

$$\frac{1}{0-m} \cdot \cosh x = \frac{1}{a^2 - m^2} [a \sinh x + m \cosh x]$$

$$-1- \quad \frac{1}{0-5} \cosh x = \frac{1}{1-25} [\sinh x + 5 \cosh x]$$

$$= \frac{1}{-24} \sinh x - \frac{5}{24} \cosh x$$

$$-5- \quad \frac{1}{0+3} \cosh 2x = \frac{1}{4-9} [2 \sinh 2x - 3 \cosh 2x]$$

★ عند  $m = \pm a$  تفشل العلاقة السابقة في هذه الحالة :

$$\frac{1}{0-a} \cosh x = e^{ax} \int e^{-ax} \cdot \cosh x \, dx \quad m = a \text{ يجب أن } :$$

$$= e^{ax} \int e^{-ax} \cdot \left( \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \right) dx$$

$$\cosh x = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2}$$

$$= e^{ax} \left[ \int \frac{dx}{2} + \int \frac{e^{-2ax}}{2} dx \right]$$

$$= \frac{x e^{ax}}{2} - \frac{1}{4a} e^{-ax} \quad \star$$

وهذه العلاقة ليس لها أهمية من الناحية العملية لكن نعلم بأن  $\cosh x = \cosh(-x)$  لذلك فإن العلاقة السابقة تأخذ بعد تعويض كل  $a$  بـ  $-a$  الشكل الآتي :

$$\frac{1}{0+a} \cosh x = \frac{x e^{-ax}}{2} + \frac{1}{4a} e^{ax} \quad \star \star$$



نظر  $\star \star$  من  $\star \star$  :  $\frac{1}{D-a} - \frac{1}{D+a}$

$$\left( \frac{1}{D-a} - \frac{1}{D+a} \right) \cdot \text{ch} ax = \frac{x}{2} (e^{ax} - e^{-ax}) - \frac{1}{4a} (e^{ax} + e^{-ax})$$

$$\textcircled{2a} + \frac{2a}{D^2 - a^2} \cdot \text{ch} ax = \frac{x}{2} (e^{ax} - e^{-ax}) - \frac{1}{4a} (e^{ax} + e^{-ax})$$

$$\frac{1}{D^2 - a^2} \cdot \text{ch} ax = \frac{x}{2a} \left( \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{2} \right) - \frac{1}{4a} \left( \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2} \right)$$

$$\frac{1}{D^2 - a^2} \cdot \text{ch} ax = \frac{x}{2a} \text{ch} ax - \frac{1}{4a} \text{sh} ax$$

$$(D^2 - a^2) \left( -\frac{1}{4a^2} \cdot \text{ch} ax \right) \quad \text{نكض ان :}$$

$$= -\frac{1}{4a^2} (D^2 - a^2) \cdot \text{ch} ax = -\frac{1}{4a^2} (a^2 - a^2) \cdot \text{ch} ax = 0$$

$$\frac{1}{D^2 - a^2} \cdot \text{ch} ax = \frac{x}{2a} \cdot \text{sh} ax \quad \text{لذلك فان :}$$

$$\frac{1}{D^2 - 16} \cdot \text{ch} 4x = \frac{x}{8} \cdot \text{sh} 4x \quad \text{مثال : او جد ناتج :}$$

ان كان  $v(x) = \text{sh} ax$

$$\frac{1}{D-m} \cdot \text{sh} ax = \frac{1}{a^2 - m^2} [a \cdot \text{ch} ax + m \cdot \text{sh} ax]$$

ويمكن انبات ذلك بطريقة مشابهة تماماً كاثبات العلاقة السابقة

$$1- \frac{1}{D-1} \cdot \text{sh} 2x = \frac{1}{4-1} [2 \cdot \text{ch} 2x + \text{sh} 2x] \quad \text{مثال : او جد ناتج :}$$

$$5- \frac{1}{D+2} \cdot \text{sh} 3x = \frac{1}{9-4} [3 \cdot \text{ch} 3x - 2 \cdot \text{sh} 3x]$$



SUBJECT:



عنه  $\pm a = m$  العلاقة السابقة تفيد وبالتالي سنجد كما في الخطوة السابقة أن

$$\frac{1}{D^2 - a^2} \cdot \text{shax} = \frac{x}{2a} \cdot \text{chax}.$$